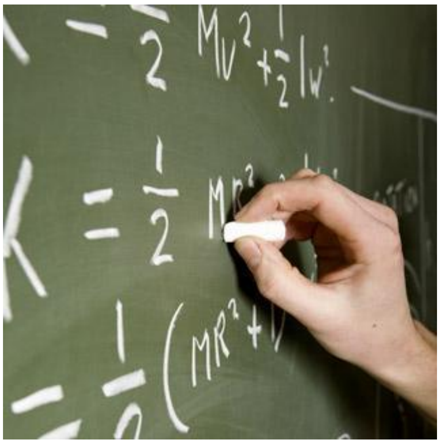
INSTITUTO SUPERIOR DEL PROFESORADO
DR. JOAQUIN V. GONZALEZ



PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MATEMÁTICA

RM 2090-15 ANEXO VII

- Ingreso 2017 -

"La matemática es el magistral edificio imaginado por el hombre para comprender el Universo. En ella se encuentra lo absoluto y lo infinito, lo prensible y lo inaprensible, y está rodeada de altos muros ante los cuales se puede pasar y volver a pasar sin ningún provecho. En ellos se abre a veces una puerta; se empuja, se entra y se está ya en otro sitio donde se encuentran los dioses y las claves de los grandes sistemas. Estas puertas son las de los milagros, y, franqueada una de ellas, ya no es el hombre quien actúa, sino el Universo que toca en un punto cualquiera y ante él se desarrollan los prodigiosos tapices de las combinaciones sin límites. Está en el país de los números. Dejadle permanecer en él, maravillado ante tanta luz tan intensamente esparcida".

Le Corbusier. El Modulor. 1953. Introducción

DENOMINACIÓN DE LA CARRERA: Profesorado de Educación Secundaria en Matemática.

TITULO A OTORGAR: Profesor/a de Educación Secundaria en Matemática.

DURACIÓN DE LA CARRERA EN AÑOS ACADÉMICOS: 4 (cuatro).

CARGA HORARIA TOTAL DE LA CARRERA: 4544 Horas Cátedras y 3030 Horas Reloj.

CONDICIONES DE INGRESO: Estudios Secundarios Completos.

Perfil del Egresado

…" la tarea de enseñar demanda el desarrollo de capacidades profesionales referidas al dominio de campos disciplinares, pero también al trabajo con el pensamiento en virtud de la reflexión crítica, la toma de decisiones con autonomía y el trabajo colaborativo sustentado en principios democráticos.

Formar un/a docente con autoridad pedagógica y disciplinar es un horizonte de formación nodal en esta propuesta. Por autoridad se entiende la capacidad profesional y ética para producir intervenciones argumentadas, sin omitir las lecturas de las situaciones escolares particulares, posibilitando experiencias de aprendizaje para todo/as.

En síntesis, el/la profesor/a debe estar en condiciones de elaborar propuestas y situaciones de enseñanza que atiendan tanto a las necesidades de aprendizaje como a los contextos sociales, históricos, lingüísticos y culturales que conforman la realidad provincial".

El curso de ingreso está orientado a:

- Integrar a los alumnos a la comunidad académica del **Instituto Superior del Profesorado Nº 2,** conociendo aspectos formales del cursado de la carrera y del funcionamiento en la institución.
- Recuperar conocimientos y procedimientos matemáticos propios de la educación secundaria a partir de la lectura y resolución de actividades propuestas.
- Promover un estilo de aprendizaje autónomo y responsable, propio de la educación superior.
- Reflexionar en torno a la Matemática como disciplina científica y su enseñanza en el mundo contemporáneo a partir de actividades de lectura/interpretación, reflexión, discusión y escritura. (a realizarse en forma presencial)

Plan de estudio

PRIMER AÑO		
Unidad Curricular	**Hs cátedras semanales**	**Formato curricular**
CAMPO DE LA FORMACIÓN GENERAL		
Pedagogía	**4**	**Materia**
Didáctica y Curriculum	**4**	**Materia**
CTS y Educación Matemática	**3**	**Seminario**
CAMPO DE LA FORMACIÓN ESPECÍFICA		
Aritmética y Álgebra I	**4**	**Materia**
Geometría I	**5**	**Materia**
Cálculo I	**5**	**Materia**
Modelización Matemática I	**3**	**Taller**
Estadística y Probabilidad I	**2**	**Taller**
CAMPO DE LA FORMACION EN LA PRACTICA PROFESIONAL		
Práctica Docente I: Escenarios educativos	**3**	**Taller** **Taller integrador**

SEGUNDO AÑO		
Unidad Curricular	Hs cátedras semanales	Formato curricular
CAMPO DE LA FORMACIÓN GENERAL		
Historia y Política de la Educación Argentina	3	Materia
Instituciones Educativas	3	Materia
Psicología y Educación	4	Materia
CAMPO DE LA FORMACIÓN ESPECÍFICA		
Aritmética y Álgebra II	4	Materia
Geometría II	4	Materia
Cálculo II	5	Materia
Modelización Matemática II	3	Taller
Física I	2	Materia
Didáctica de la Matemática I	4	Materia
CAMPO DE LA FORMACION EN LA PRACTICA PROFESIONAL		
Práctica Docente II: La Institución Escolar	3	Taller Taller integrador

TERCER AÑO		
Unidad Curricular	Hs cátedras semanales	Formato curricular
CAMPO DE LA FORMACIÓN GENERAL		
Filosofía	3	Materia
Metodología de la Investigación	2	Seminario
CAMPO DE LA FORMACIÓN ESPECÍFICA		
Aritmética y Álgebra III	3	Materia
Geometría III	3	Materia
Cálculo III	5	Materia
Modelización Matemática III	3	Taller
Física II	3	Materia
Didáctica de la Matemática II	4	Materia
Sujetos de la Educación Secundaria	4	Materia
CAMPO DE LA FORMACION EN LA PRACTICA PROFESIONAL		
Práctica Docente III: La clase, los procesos del aprender y del enseñar	5	Taller Taller integrador

CUARTO AÑO		
Unidad Curricular	Hs cátedras semanales	Formato curricular
CAMPO DE LA FORMACIÓN GENERAL		
Prácticas de Investigación	3	Taller
Ética y Trabajo Docente	3	Materia
Educación Integral Sexual	3	Seminario
CAMPO DE LA FORMACIÓN ESPECÍFICA		
Aritmética y Álgebra IV	3	Materia

Geometría IV	**3**	**Materia**
Cálculo IV	**3**	**Materia**
Estadística y Probabilidad II	**4**	**Materia**
Epistemología e Historia de la Matemática	**5**	**Materia**
CAMPO DE LA FORMACION EN LA PRACTICA PROFESIONAL		
Práctica Docente IV: Residencia, el rol docente y su práctica	**6**	**Taller**
Modelización Matemática IV	**4**	**Taller**
UNIDAD DE DEFINICIÓN INSTITUCIONAL		
UDI	**2**	**Seminario**

Materias o Asignaturas

Estas unidades se caracterizan por brindar conocimientos y modelos explicativos de carácter provisional, evitando todo dogmatismo, como se corresponde con el carácter del conocimiento científico y su evolución a través del tiempo. Asimismo, ejercitan a los alumnos en el análisis de problemas, la investigación documental, en la interpretación de tablas y gráficos, en la preparación de informes, la elaboración de banco de datos y archivos bibliográficos, en el desarrollo de la comunicación oral y escrita, y en general, en los métodos de trabajo intelectual transferibles a la acción profesional., etc.

Seminarios

Son instancias académicas de estudio de problemas relevantes para la formación profesional. Incluye la reflexión crítica de las concepciones o supuestos previos sobre tales problemas, que los estudiantes tienen incorporados como resultado de su propia experiencia, para luego profundizar su comprensión a través de la lectura y el debate de materiales bibliográficos o de investigación. Estas unidades, permiten el cuestionamiento del pensamiento práctico y ejercitan en el trabajo reflexivo y en el manejo de literatura específica, como usuarios activos de la producción del conocimiento.

Talleres

Unidades curriculares orientadas a la producción e instrumentación requerida para la acción profesional. Como tales, son unidades que promueven la resolución práctica de situaciones de alto valor para la formación docente.
Como modalidad pedagógica, el taller apunta al desarrollo de capacidades para el análisis de casos y de alternativas de acción, la toma de decisiones y la producción de soluciones e innovaciones para encararlos. Para ello el taller ofrece el espacio para la elaboración de proyectos concretos y supone la ejercitación en capacidades para elegir entre cursos de acciones posibles y pertinentes para la situación, habilidades para la selección de metodologías, medios y recursos, el diseño de planes de trabajo operativo y la capacidad de ponerlo en práctica.
El taller es una instancia de experimentación para el trabajo en equipos, lo que constituye una de las necesidades de formación de los docentes. En este proceso, se estimula la capacidad de intercambio, la búsqueda de soluciones originales y la autonomía del grupo.

REGIMEN DE CORRELATIVIDADES

Nº		ESPACIOS CURRICULARES	PARA CURSAR		PARA RENDIR
			REGULARIZADA	APROBADA	APROBADA
	1	Pedagogía			
	2	Didáctica y Curriculum			
	3	CTS y Educación Matemática			
	4	Aritmética y Álgebra I			
1º	5	Geometría I			
	6	Cálculo I			
	7	Modelización Matemática I			
	8	Estadística y Probabilidad I			
	9	Práctica Docente I: Escenarios educativos			
	10	Historia y Política de la Educación Argentina	11		1
	11	Instituciones Educativas	1		1
2º	12	Psicología y Educación			
	13	Aritmética y Álgebra II	4 – 5		4 – 5
	14	Geometría II	5 – 4		5 – 4
	15	Cálculo II	6 – 4		6 – 4
	16	Modelización Matemática II	4 – 5 – 6	7	7
	17	Física I	6 – 4		6 – 4
	18	Didáctica de la Matemática I	2		2
	19	Práctica Docente II: La Institución Escolar	2 – 7	9	
	20	Filosofía			1
	21	Metodología de la Investigación			8
	22	Aritmética y Álgebra III	13 – 14	4 – 5	13 – 14
3º	23	Geometría III	14 – 13	5 – 4	14 – 13
	24	Cálculo III	15 – 14	6 – 4	15 – 14
	25	Modelización Matemática III	13 – 14 – 15	16	22 – 23 – 24 Regularizadas 16 Aprobada
	26	Física II	17 – 15	4 – 6	17 – 15
	27	Didáctica de la Matemática II	18	2	18
	28	Sujetos de la Educación Secundaria	12		12
	29	Práctica Docente III: La clase, los procesos del aprender y del enseñar	13 – 14 – 15	1° año completo 19 - 18	
	30	Prácticas de Investigación	21		21
	31	Ética y Trabajo Docente			20
	32	Educación Integral Sexual			28
	33	Aritmética y Álgebra IV	22 – 23	13 – 14	22 – 23
	34	Geometría IV	22 – 23	13 – 14	22 – 23

4º	35	Cálculo IV	24 – 26	14 – 15	24 – 26
	36	Estadística y Probabilidad II	24	15 – 8	24
	37	Epistemología e Historia de la Matemática	23 – 24 – 26	14 – 15 – 17	23 – 24 – 26
	38	Práctica Docente IV: Residencia, el rol docente y su práctica	22 – 23 – 24 – 28	1° y 2° año completo 29 – 27	
	39	Modelización Matemática IV	22 – 23 – 24	25	23
	40	UDI			

Contenidos específicos

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los primeros números que el hombre comienza a utilizar son los Números Naturales, ya que les servía para contar los objetos que lo rodeaban. Éste conjunto numérico se simboliza con la letra $\mathbb{N}$ = 1,2,3,4,5,….

Al sumarlos o multiplicarlos dan como resultado otro número natural, pero al restarlos, puede ocurrir que el sustraendo sea mayor que el minuendo, o que ambos sean iguales, y este resultado ya no pertenece al conjunto $\mathbb{N}$. Surge la necesidad de definir un nuevo conjunto, Números Enteros, formado por los números naturales (Enteros positivos), el cero y los números enteros negativos. Se simboliza con $\mathbb{Z}$ = ….,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,….. La adición, el producto y la sustracción son operaciones cerradas en $\mathbb{Z}$, es decir, el resultado de estas operaciones también pertenece al conjunto de números enteros.

Ahora, si divido a dos números enteros, y ocurre que divisor y dividendo no son múltiplos, el resultado del cociente no pertenece a $\mathbb{Z}$. Para darle soluciones a este tipo de divisiones surgen los Números Fraccionarios Puros. Se denominan número fraccionario puro al cociente indicado entre dos números enteros: 7/2, -3/5, 4/2,…

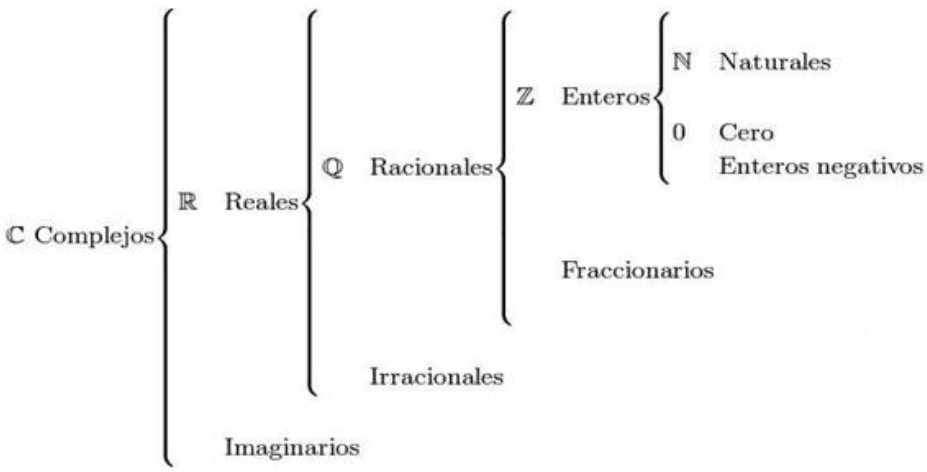
Los números fraccionarios puros y lo enteros forman el conjunto de Número Racionales, que se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$. En este conjunto numérico están incluidas las expresiones decimales, les expresiones decimales periódicas puras y mixtas. Ej: 0,034; 0,123; 2,343434…….; 1,5277777….

En el conjunto $\mathbb{Q}$ es posible realizar las operaciones de adición, sustracción, producto, división y potenciación. Para algunos números la radicación no tiene solución en el campo de los números racionales, ejemplos: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt{8}$. Surge la necesidad de crear los Números Irracionales (I), son aquellos que no se pueden expresar mediante una fracción y que no presentan un período decimal: $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, e, π, ….

A la unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales se los denomina Números Reales, simbolizándolos con la letra $\mathbb{R}$.

Los números reales se representan mediante una recta numérica, que la completan sin dejar espacios.

En el conjunto $\mathbb{R}$ hay una operación que no tiene solución, es la radicación de índice par y radicando negativo. Para solucionar este problema surgen los Números Complejos, cuya unidad imaginaria es i= $\sqrt{-1}$. De esta forma, la operación $\sqrt{-9}$ tiene solución en el conjunto de los complejos ($\mathbb{C}$): $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\ .\ \sqrt{-1}$ = 3i. Más adelante veremos que los números complejos se representan mediante coordenadas cartesianas, ya que la recta numérica queda cubierta por los números reales.



Actividad 1: Clasifica los siguientes números según sean: Número Complejo, Número Real, Número Racional, Número Irracional, Número Entero, Número Natural.

Número	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	I	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
23						
-5						
3,4787878...						
-4/7						
$\sqrt{15}$						
π						
14/7						
$\sqrt{-36}$						
$4,\hat{5}$						
$\sqrt{-8}$						
$2,0\widehat{48}$						
$5\sqrt{3}$						
-24/8						
$\sqrt[3]{-27}$						

Actividad 2:

Representa en la recta numérica (puedes hacer varias rectas según la necesidad) los siguientes números reales: -3 ; 2/5 ; 6 ; -3/4 ; $\sqrt{2}$; 12/6 ; $\sqrt{10}$; -36/ 72 ; $\sqrt{3}$; $1,\hat{3}$; $\sqrt[5]{-32}$; $0,\hat{6}$

Actividad 3:

Menciona los elementos que pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números enteros negativos mayores a -5.

b) El conjunto de los números naturales menores a 7.

c) El conjunto de los números enteros menores que 2.

Propiedades de los números reales

Para todos los números reales a, b y c	Suma	Multiplicación
Propiedad de cierre	$a+b$ es un número real	$a \cdot b$ es un número real
Propiedad conmutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Propiedad asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Propiedad del elemento neutro	$0+a=a+0=a$ (0 es el elemento neutro de la suma)	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (1 es el elemento neutro de la multiplicación)
Propiedad del elemento inverso	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, $a \neq 0$
Propiedad distributiva	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b+c)\cdot a = b \cdot a + c \cdot a$	
Propiedad de la multiplicación por cero	$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$	
Propiedad del producto cero	Si $a \cdot b = 0$, entonces $a=0$ o $b=0$, o bien a la vez $a=0$ y $b=0$	

Las propiedades de la siguiente tabla se han descrito, principalmente, en términos de suma y multiplicación. Ahora podemos definir las operaciones básicas de resta y división en términos de la suma y multiplicación respectivamente.

Resta

La diferencia, $a-b$, de dos número reales, a y b, se define como: $a-b=a+(-b)$

Por ejemplo: $5-8=5+(-8)=-3$

En forma alternativa decimos que: $a-b=c \Leftrightarrow c+b=a$

Así; $5-8=-3 \Leftrightarrow -3+8=5$

Cuando decimos "proposición p si y solo si proposición q", significa que si alguna de las proposiciones es cierta, también lo será la otra. Así, la proposición $a-b=c \Leftrightarrow c+b=a$, quiere decir:

Si $a-b=c \Rightarrow c+b=a$ y también si $c+b=a \Rightarrow a-b=c$

División

El cociente $a \div b$ de dos números reales a y b se define como: $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$, $b \neq 0$

Por ejemplo $8 \div 2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

También podemos decir que: $a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$, $b \neq 0$

Entonces, $8 \div 2 = 4 \Leftrightarrow a \cdot 2 = 8$

La afirmación $a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$, $b \neq 0$, quiere decir:

Si $a \div b = c \Rightarrow c \cdot b = a$, y también si $c \cdot b = a \Rightarrow a \div b = c$

Al usar esta definición de la división podemos ver por qué no es posible dividir por cero. Supongamos que es posible la división por cero. Por ejemplo, supongamos que $2 \div 0 = x$, siendo x un número real. Entonces, por definición de la división, $0 \cdot x = 2$. Pero $0 \cdot x = 0$, y esto nos conduce a la proposición falsa de que $2 = 0$. Este argumento se puede repetir cuando se sustituye 2 por cualquier número distinto de cero.

Ahora, ¿puedes analizar porque $0 \div 0$ es indeterminado? Justifica.

Vemos que el conjunto de números reales es cerrado con respecto a la resta, porque $a-b=a+(-b)$, y los números reales tienen la propiedad de cerradura para la suma. Igualmente, a excepción de la división entre 0, el cociente de dos números reales cualesquiera es un número real. Sin embargo, hay algunos subconjuntos de los números reales que no tienen esas propiedades. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros no negativos no es cerrado con respecto a la resta, y el conjunto de los enteros no es cerrado con respecto a la división.

Actividad 4:

Indica la propiedad de los números reales que se aplica en cada caso:

a) 2.4.9 = 4.2.9 b) $\frac{2}{3}$ .1 = $\frac{2}{3}$ c) -7 + 0 = -7

d) -53 + 53 = 0 e) (1 + $\frac{2}{7}$) + 5 = 1+ ($\frac{2}{7}$ + 5) f) (-5 + 11) . 0 = 0

g) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 4 = $\sqrt{3}$ h) ($\sqrt{5}$. 3) . $\sqrt{125}$ = $\sqrt{5}$. (3 . $\sqrt{125}$)

i) $(\frac{7}{2} - 3) \,.\, (-2) = \frac{7}{2} \,.\, (-2) - 3 \,.\, (-2)$ j) $-12 \,.\, 5 + 9 = 9 + (-12) \,.\, 5$

Prioridad de las operaciones en expresiones aritméticas

Una expresión aritmética es una cadena de operaciones entre varios números.

Si la expresión no tiene paréntesis se efectúan en primer lugar los productos y los cocientes, y luego las sumas y restas. Recuerda que los signos + y – separan en términos.

Si existen paréntesis, corchetes y llaves en las expresiones, se resuelven en primer lugar las operaciones dentro del paréntesis, luego las operaciones dentro de los corchetes y por último los indicados dentro de las llaves.

$$\{-2-[8:(-2+3)+4.(-1-3)]+(-7)\}.(-2)=$$
$$=\{-2-[8:1+4.(-4)]+(-7)\}.(-2)=$$
$$=\{-2-[8-16]+(-7)\}.(-2)=$$
$$=\{-2+8-7\}.(-2)=$$
$$=-1.(-2)=2$$

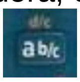
Uso de la calculadora:

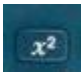
Toda expresión numérica se puede realizar en su totalidad con la calculadora. Para ello es necesario respetar la prioridad de las operaciones y utilizar paréntesis, corchetes y llaves según se indique en la expresión. Se  debe presionar la siguiente tecla cada vez que sea necesario.

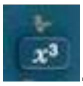
En el caso que la expresión tenga un cociente, donde en el numerador también aparezcan operaciones, es necesario agrupar toda la expresión entre paréntesis:

$$\frac{2\,.(-3+5)-(-11)}{12-17}=$$

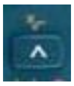
 2.  -3+5  -  11  :  12-17  = -3

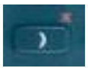
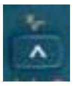
Para indicar fracciones utilizando la calculadora, se utiliza la tecla . Así para realizar la operación: $-\frac{2}{3}+\frac{7}{4}=$  2  3 + 7  4 = 1⌋ 1 2 (número mixto). Para observar el resultado final en fracción:  , se observa $\frac{13}{12}$.

Si evaluamos el cuadrado de un número, podemos utilizar la tecla 

, al igual que si debe evaluar el cubo 

.

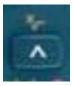
En el caso que se deban calcular potencias superiores a 2 y 3, será necesario utilizar la tecla . Así para hallar $(-12)^5$ =  

12   5 = - 248.832.

En el caso que en exponente sea negativo, o una operación, se debe indicar entre paréntesis.

De la misma manera, si debemos hallar raíces superiores a 3, utilizamos la misma tecla, anteponiendo 

. Por ejemplo: $\sqrt[5]{1024} = 5$ 

 1024 = 4

Actividad 5:

Resuelve las siguientes operaciones con números reales. Verifica los resultados utilizando la calculadora:

a) $-3.\{[-3-4.(-5)]:(-1)-(-12+9)\}-(-1-3)=$

b) $-4+\frac{(-3+11).(-4)}{6-3.(-3)}=$

c) $\frac{12.(-40).(-8)}{2.(-3)-4.(-1)}=$

d) $\left\{10-\left[\frac{(40+21).(72-38)}{(32-15)}\right]\right\}:2=$

e) $\left[\frac{(-11):(-1)-15}{-2.(-4)-(-8):4}-(-9)\right].\frac{1}{2}=$

f) $\left[\frac{\frac{2}{3}-2.(\frac{5}{4})}{-\frac{1}{5}}\right]:\left[\frac{-2+3.(-1)}{\frac{1}{2}.(-4)}\right]=$

g) $-\left\{\left[\sqrt{2}.\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+\left(-3+\frac{7}{2}\right).(-2)\right]:\frac{8}{5}\right\}.\left(\frac{-2+\frac{3}{4}}{-5}\right)=$

h) $\left[(-2+5):\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]:\left(\frac{-8}{243}\right)^{-1}=$

i) $\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}+\left[\frac{-3}{2}.(-1.2^3)\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=$

Potenciación

Gran parte de la notación matemática se puede considerar como abreviatura eficiente de largas operaciones. Por ejemplo:

$$4^9 = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$$

En este ejemplo, usamos un *exponente entero positivo*.

DEFINICIÓN DE UN EXPONENTE ENTERO POSITIVO

Si n es un entero positivo y b es cualquier número real, entonces

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots\ldots \cdot b}_{n \text{ factores}}$$

El número b se llama **base** y n se llama **exponente**

A continuación presentamos algunos ejemplos de la definición

$$b^1 = b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$

$$10^6 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$$

Observación: Tener en cuenta que: $(-3)^2 \neq -3^2$.

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

$-3^2 = -(3\cdot3) = -9$

Se establecen varias reglas importantes acerca de los exponentes enteros positivos, basadas en la definición de la potenciación. He aquí una lista de ellas, en la cual m y n son enteros positivos, a y b son dos números cualesquiera y los denominadores no pueden ser cero.

REGLA 1: $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ Ejemplos: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ $x^3 \cdot x^4 = x^7$

REGLA 2: $b^m : b^n = b^{m-n}$ Ejemplos: $(m>n)$ $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$ $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$

$(m=n)$ $\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0 = 1$ $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0 = 1$

$(m>n)$ $\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\frac{x^3}{x^4} = x^{3-4} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

REGLA 3: $(b^m)^n = b^{m.n}$ Ejemplos: $(2^3)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6$ $(x^3)^2 = x^{3\cdot2} = x^6$

REGLA 4: $(a\cdot b)^m = a^m.b^m$ Ejemplos: $(2\cdot3)^5 = 2^5\cdot3^5$ $(x\cdot y)^5 = x^5\cdot y^5$

REGLA 5: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ Ejemplos: $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

Si se emplean en forma correcta, estas reglas pueden simplificar los cálculos, como en los ejemplos que siguen:

Ejemplo 1: Evalúe de dos maneras $12^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

a) $12^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1728 \cdot \left(\frac{1}{216}\right) = \frac{1728}{216} = 8$

b) $12^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(12 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$

Ejemplo 2: Simplifique a) $2x^3 \cdot x^4$ b) $\frac{(x^3 y)^2 y^3}{x^4 y^6}$

a) $2x^3 \cdot x^4 = 2 \cdot x^{3+4} = 2 \cdot x^7$

b) $\frac{(x^3 y)^2 y^3}{x^4 y^6} = \frac{(x^3)^2 y^2 y^3}{x^4 y^6} = \frac{x^6 y^5}{x^4 y^6} = \frac{x^2}{y}$

Ejemplo 3: Simplifique $\frac{4^5}{8^3}$

Como las bases no son las mismas no se aplica la regla 2. Sin embargo, para no calcular 4^5 ni 8^3, se puede simplificar este problema del siguiente modo:

$$\frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2$$

Nuestra descripción de los exponentes se ha restringido al empleo de enteros positivos. Veamos ahora lo que significa un exponente 0. En particular, ¿qué significa 5^0? Sabemos que 5^3 quiere decir que se usa 5 tres veces como factor. Pero decididamente no tiene sentido usar cero veces 5. Con las reglas de los exponentes resolveremos este dilema.

Desearíamos que estas leyes de los exponentes fueran válidas aun si alguno de los exponentes es cero. Esto es, quisiéramos que la regla 2 diera como resultado:

$$\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Pero ya sabemos que

$$\frac{5^2}{5^2} = \frac{25}{25} = 1$$

Por consiguiente, a 5^0 se le debe asignar el valor 1. Entonces, para preservar las reglas de los exponentes debemos decir que $5^0 = 1$. Esto es, de ahora en adelante, convenimos en lo siguiente:

EXPONENTE CERO:

Si b es un número real distinto de 0, entonces: $b^0 = 1$

DEFINICIÓN DE b^{-n} :

Si n es un entero y $b \neq 0$, entonces: $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

De acuerdo con esta definición, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$, porque $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$. En otras palabras, una fracción a la potencia -1 es el recíproco de la fracción.

Ejemplos: $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{49}} = 49$ o sea $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} = \left(7^{-1}\right)^{-2} = 7^2 = 49$

$$\frac{5^{-2}}{15^{-2}} = \left(\frac{5}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(3^{-1}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

Actividad 6:

Simplificar y expresar cada respuesta sólo con exponentes positivos

a) $\dfrac{(x^2y)^4}{(xy)^2}$ d) $\dfrac{(-a^{-5}b^6)^3}{(a^8b^4)^2}$ g) $(a^{-2}b^3)^{-1}$

b) $\left(\dfrac{3a^2}{b^3}\right)^2\left(\dfrac{-2a}{3b}\right)^2$ e) $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(a+b)^{-8}}$ h) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-1}$

c) $\dfrac{(2x^3y^{-2})^2}{8x^{-3}y^2}$ f) $\dfrac{8x^{-8}y^{-12}}{2x^{-2}y^{-6}}$ i) $\dfrac{5x^0y^{-2}}{x^{-1}y^{-2}}$

RADICALES Y EXPONENTES RACIONALES

¿Cuál es el valor de $\sqrt{25}$? ¿Dijo usted ± 5? Si lo hizo, ¡cometió un error muy común!

Nótese que $\sqrt{25}$ se llama **radical** y sólo representa la raíz cuadrada positiva de 25; esto es, $\sqrt{25} = +5$. Para expresar la raíz cuadrada negativa de 25 se escribe $-\sqrt{25} = -5$. En resumen:

Si $a > 0, \Rightarrow \sqrt{a} = x,$ siendo $x > 0$ y $x^2 = a$

La raíz cuadrada positiva $\sqrt{a}$, se llama **raíz cuadrada principal de a.**

En general, la **raíz enésima principal** de un número real $\sqrt[n]{a}$, se representa mediante $\sqrt[n]{a}$, pero esta expresión no siempre tiene significado. Por ejemplo, tratemos de evaluar $\sqrt[4]{-16}$:

$$2^4 = 16 \qquad (-2)^4 = 16$$

Parece que no hay número real x alguno tal que $x^4 = -16$. En general, no hay número real que sea la raíz de un número negativo.

DEFINICIÓN DE $\sqrt[n]{a}$ *; LA RAÍZ ENÉSIMA PRINCIPAL DE* a

Sea a un número real y n un entero positivo, $n \geq 2$,

1. Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número positivo x tal que $x^n = a$.

2. $\sqrt[n]{0} = 0$

3. Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número negativo x tal que $x^n = a$.

$a < 0$ $\sqrt[n]{a}$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3 = 64$

2. $\sqrt[0]{0} = 0$

3. $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

4. $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ también se llama **radical;** n es el **índice** o **raíz; y** a es el **radicando.**

Para las siguientes reglas se supone que existen todos los radicales, de acuerdo con la definición de $\sqrt[n]{a}$ y, como siempre, que los denominadores no son cero.

REGLAS PARA LOS RADICALES

Si todos los radicales indicados son números reales, entonces

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ con $b \neq 0$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

En general:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ para n entero impar positivo

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n entero par positivo

Ya estamos preparados para enunciar la ampliación del concepto exponencial para incluir fraccionarios. De nuevo, nuestra pauta será preservar las reglas anteriores para exponentes enteros.

DEFINICIÓN DE $b^{\frac{1}{n}}$

Para un número real, b y un entero positivo, n $(n \geq 2)$, $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ siempre que existe $\sqrt[n]{b}$

Ejemplos:

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$ $\quad$ $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$ $\quad$ $(-16)^{\frac{1}{4}}$ no está definido porque $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real

Ahora se ha definido $b^{\frac{1}{n}}$**,** podemos definir $b^{\frac{m}{n}}$, siendo $\dfrac{m}{n}$ cualquier número racional:

DEFINICIÓN DE $b^{\frac{1}{n}}$

Sea $\dfrac{m}{n}$ un número racional, con $n \geq 2$. Si b es un número real tal que $\sqrt[n]{b}$ está definida, entonces:

$$b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m} \qquad b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(b^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplos:

$$(-64)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = (-4)^2 = 16 \text{ empleando } b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$$

o bien

$$(-64)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = \sqrt[3]{4096} = 16 \text{ empleando } b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

Observamos que la definición anterior $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$ se amplía al caso $b^{-\left(\frac{m}{n}\right)}$ como sigue:

$$b^{-\left(\frac{m}{n}\right)} = b^{\frac{-m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m} = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}$$

EXTRAER FACTORES FUERA DEL RADICAL

Se pueden extraer factores cuando tenga un exponente mayor o igual que el índice del radical.

Ejemplos:

1. $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$

2. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$

3. $\sqrt{12a^3b^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{3 \cdot a} = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{3 \cdot a}$ (suponiendo que las variables representan números reales positivos)

En los ejemplos se utilizan las propiedades del producto de potencias de igual base y la propiedad distributiva de la radicación con respecto al producto.

INTRODUCIR FACTORES DENTRO DEL RADICAL

Cualquier factor que multiplique a una raíz, se puede introducir dentro de la misma, elevándolo al índice correspondiente, como se ve en el siguiente ejemplo: $b \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a \cdot b^4}$

De lo visto podemos enunciar la propiedad fundamental de la radicación, que dice:

Un radical no varía si se multiplica o divide el índice y el exponente por un mismo número.

Actividad 7:

Calcula:

a) $81^{-\frac{1}{2}} =$ b) $\sqrt[3]{-64} =$ c) $\sqrt{\sqrt{625}} =$ d) $\frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{-24}} =$

e) $\sqrt[3]{(-125).(-1000)} =$ f) $\frac{\sqrt{9}}{27^{-\frac{1}{3}}} =$ g) $(16\,y^5)^{\frac{3}{10}} =$ h) $\sqrt{144} + \sqrt{25} =$

i) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} =$ j) $(\frac{1}{8} + \frac{1}{27})^{\frac{1}{3}} =$ k) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} + (-\frac{32}{243})^{\frac{2}{5}} =$ l) $(\frac{625}{a^8})^{-\frac{3}{4}} =$

Actividad 8:

Extraer factores fuera del radical:

a) $\sqrt[3]{64} =$ b) $\sqrt[4]{625} =$ c) $\sqrt{1764} =$ d) $\sqrt[3]{8000} =$

e) $\sqrt[4]{1296} =$ f) $\sqrt{24 \cdot 7^2 \cdot x^5 \cdot z^{13}} =$ g) $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{y} \cdot \sqrt{81 \cdot a^8 \cdot m \cdot y^9}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se operan los términos semejantes como se muestra en los ejemplos que se dan a continuación:

1.
$$5 \cdot \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} =$$
$$= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = (10 - 3 + 1) \cdot \sqrt[3]{2}$$

2.
$$\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt[4]{36} - \sqrt{8} + \sqrt{54} = \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3^2} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2 \cdot 3} - 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = -\sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{6}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

a) Radicales de igual índice:

Para multiplicar o dividir radicales de igual índice, aplicamos la propiedad distributiva de la radicación respecto de la multiplicación y división.

Ejemplos:

1. $\sqrt[5]{2^2\cdot 5^3}\cdot\sqrt[5]{2\cdot 5^2}=\sqrt[5]{2^2\cdot 2\cdot 5^3\cdot 5^2}=\sqrt[5]{2^3\cdot 5^5}=5\cdot\sqrt[5]{2^3}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^5}{2}}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$

b) Radicales de distinto índice:

Previamente se los reduce a un índice común y luego se opera como en el punto anterior.

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^2\cdot b^3}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[3\cdot 2]{a^{2\cdot 2}}\cdot\sqrt[6]{a^2\cdot b^3}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{b^3}=\sqrt[6]{a^4\cdot a^2\cdot b^3\cdot b^3}=\sqrt[6]{a^6\cdot b^6}=\sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{b^6}=a\cdot b$
(suponiendo que las variables representan números reales positivos)

2. $\dfrac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[6]{a^5}}=\dfrac{\sqrt[4\cdot 3]{a^{7\cdot 3}}}{\sqrt[6\cdot 2]{a^{5\cdot 2}}}=\sqrt[12]{\dfrac{a^{21}}{a^{10}}}=\sqrt[12]{a^{11}}$

Actividad 9:

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{18}=$ b) $\sqrt{32}+\sqrt{72}=$ c) $2\sqrt{5}+3\sqrt{125}=$

d) $-5\sqrt{24}-2\sqrt{54}=$ e) $-5\sqrt{75x^2}+2\sqrt{12x^2}=$ f) $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{16}=$

g) $3\sqrt{10}+4\sqrt{90}-5\sqrt{40}=$ h) $\frac{8}{\sqrt{2}}+2\sqrt{50}=$ i) $\frac{2}{\sqrt{3}}+10\sqrt{3}-2\sqrt{12}=$

j) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}).\left(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)=$ k) $2a\sqrt[3]{27x^3\,y^5}$ - $6c\sqrt[3]{-x^3\,y}=$

l) $\sqrt[3]{16m^4}-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{2m^8}-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{54m^4}=$ m) $2y^3\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}x^4y^{-7}}\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\sqrt[4]{\dfrac{16}{75}xy^5}\right)=$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Racionalizar el denominador de una fracción significa convertir a ésta en otra equivalente en cuyo denominador no hay radicales.

DIVISOR IRRACIONAL	Racionalización →	DIVISOR RACIONAL

Pueden presentarse distintos casos:

a) El denominador es un radical de índice 2: en este caso se multiplican numerador y denominador por el radical en cuestión como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$$

b) El denominador es una raíz de índice n, y el radicando esté elevado a la potencia p, se multiplica y divide por una raíz de igual índice n, cuyo radicando está elevado a la potencia $n-p$, como se muestra en el ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

c) Cuando en el denominador hay una suma o diferencia y los sumandos son raíces cuadradas. Se procede multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

<u>Ejemplos:</u>

a)

$$\frac{3}{2+\sqrt{7}}=\frac{3}{2+\sqrt{7}}\cdot\frac{2-\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}{\left(2+\sqrt{7}\right)\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}=\frac{3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}{2^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}{4-7}=\frac{3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}{-3}=-\left(2-\sqrt{7}\right)=-2+\sqrt{7}$$

b)

$$\frac{b}{\sqrt{2}-\sqrt{b}}=\frac{b}{\sqrt{2}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}+\sqrt{b}}=\frac{b\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{b}\right)}=\frac{b\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{b\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{b}\right)}{2-b}$$

<u>Actividad 10:</u>

Racionalizar:

a) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{7}{\sqrt{11}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

e) $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ g) $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{11}}$ h) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ j) $\frac{2}{3\sqrt{2y}}$ k) $\frac{y}{\sqrt[6]{y^7}}$ l) $\frac{2\sqrt{x^4y^3}}{\sqrt{32x^3y}}$

<u>Actividad 11:</u>

Resuelve y simplifica:

a) $\left[\dfrac{1+\frac{3}{2}.\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2-\dfrac{\frac{7}{2}-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.\frac{3}{7}}}\right]^{-1}=$ b) $\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{6}\right)^2-1\right]^{-1}-\frac{2}{5}:\frac{7}{15}=$

c) $\frac{5-\frac{1}{2}}{2}+\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}}{\frac{3^2}{2}+\frac{3}{2^2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=$

d) $\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}+\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}=$

e) $\left(\sqrt{a+b}-c\right).\left(\sqrt{a+b}+c\right)=$

f) $\frac{3x\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{3}{2}\sqrt[4]{8x^3y}=$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Llamamos expresión algebraica a toda combinación de letras y/o números vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación de exponente racional.

Ejemplos: $2x^2-3x+1$

$3xy-x^{-4}$

$\frac{\sqrt{x-1}+y}{2x+4y}$

Si observamos los ejemplos, una expresión algebraica puede estar formada por diferentes "letras", estas letras reciben el nombre de **variables**

Clasificación de las expresiones algebraicas

Racionales

- **Enteras** → **Se llama así a las expresiones algebraicas donde las variables aparecen en el numerador y están afectadas sólo a exponente natural.**
  Ejemplos:
  a) $3x+4$
  b) $\frac{1}{2}y^2+3y+\frac{3}{4}$
  c) $\sqrt{3}-4z$

- **Fraccionarias** → **Se llama así a las expresiones algebraicas donde al menos una variable está afectada a exponente entero negativo o figura en el denominador.**
  Ejemplos:
  a) $(6x+2,3)^{-2}$
  $\frac{2x+5}{x^2-9}+x^2+1$;
  b) $7x^{-1}+0,5x^2-3x^{-4}$

Irracionales → **Se llama así a las expresiones algebraicas donde al menos una variable está afectada a exponente fraccionario o figura bajo un signo de radicación. Ejemplos:**

a) $\sqrt{x}+3x^3-\frac{1}{4}$

b) $9x^2+6x^{\frac{1}{2}}$

POLINOMIOS

Una expresión algebraica racional entera recibe el nombre de **polinomio.**
Entonces, un polinomio es una expresión algebraica en la que la o las variables aparecen vinculadas entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación y potencia de exponente entero no negativo.
Simbólicamente: $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$a_i \in \Re$ se denominan **coeficientes**

$a_n \neq 0$ se denomina **coeficiente principal**

a_0 se denomina **término independiente**

Ejemplos:

- ✓ Polinomios con una variable:

  $3x^2$

  $9a+2$

  $2y^2+5y-3$
- ✓ Polinomios con varias variables:

  $5x-xy+7y+2$

  $9xy^2z-4x^3z-14x^4y^2+9$

El polinomio $5x-xy+7y+2$ tiene cuatro términos: $5x$, $-xy$, $7y$, 2
Los coeficientes de los términos son 5, -1, 7, 2. El **grado de un término** es la suma de los exponentes de las variables que figuran en él. El grado de $-xy$ es 2, pues los exponentes son 1 en ambas variables. El **grado de un polinomio** (gr$[P(x)]$**)** es el grado mayor de sus términos.
Un polinomio con un único término es un **monomio**. Un polinomio de dos términos es un **binomio**, y uno de tres términos es un **trinomio**. A menudo los polinomios se ordenan de acuerdo con las **potencias crecientes o decrecientes** de una variable.

<u>Suma de términos semejantes</u>
Si dos términos de un polinomio tienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias, lo términos se dice que son similares o **semejantes**. Los términos semejantes se pueden “reunir” o combinar con base en la propiedad distributiva.
Ejemplos:

1. $3x^2-4y+2x^2=$

$=3x^2+2x^2-4y=$ (reacomodando los términos)

$=(3+2)x^2-4y=$ (utilizando la propiedad distributiva)

$=5x^2-4y$

2. $3x^2y-5xy^2-3x^2y-xy^2=-6xy^2$

ADICIÓN DE POLINOMIOS

La suma de dos polinomios se puede encontrar escribiendo un signo de suma entre ellos y sumando los términos semejantes.
Ejemplo:
$\left(-3x^3+2x-4\right)+\left(4x^3+3x^2+2\right)=-3x^3+4x^3+3x^2+2x-4+2=x^3+3x^2+2x-2$
A menudo es muy útil escribir los polinomios en columnas, escribiendo los términos semejantes en la misma columna y dejando espacios vacíos en aquellos lugares en los que falte algún término de ese tipo:

$$\begin{array}{rrrrr} & -3x^3 & & +2x & -4 \\ + & 4x^3 & +3x^2 & & +2 \\ \hline & x^3 & +3x & +2x & -2 \end{array}$$

La adición también se puede llevar a cabo mentalmente.
$\left(4ax^2+4bx-5\right)+\left(3ax^2+5bx+8\right)=7ax^2+9bx+3$

Inverso aditivo

La suma de un polinomio y su inverso aditivo es el polinomio nulo (es aquel cuyos coeficientes son todos nulos $0(x)$). El inverso aditivo de un polinomio se puede encontrar reemplazando cada término por su inverso aditivo.
Ejemplo: El inverso aditivo de $7xy^2-6xy-4y+3$ es $-7xy^2+6xy+4y-3$

SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Para restar un polinomio de otro, sumamos su inverso aditivo.
Ejemplo:
$\left(-9x^5-x^3+2x^2+4\right)-\left(2x^5-x^4+4x^3-3x^2\right)=$
$=\left(-9x^5-x^3+2x^2+4\right)+\left(-2x^5+x^4-4x^3+3x^2\right)=-11x^5+x^4-5x^3+5x^2+4$

Actividad 12:

Dados los siguientes polinomios, resuelve las siguientes operaciones:
$M(x)=-3x^2+2x-1,\qquad N(x)=\frac{1}{2}x+3,$
$O(x)=-x^3-4x+\frac{3}{4},\qquad P(x)=5x^3-2x^2-\frac{5}{2}x$

a) $M(x)-P(x)$
b) $-N(x)+O(x)-M(x)$
c) $[M(x)+N(x)]-[P(x)-O(x)]$
d) $-[O(x)+M(x)-N(x)]+P(x)$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de polinomios se basa en la propiedad distributiva. Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos cada término de uno de ellos por todos los términos del otro y después sumamos los resultados.
Ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 4x^4y-7x^2y+3y \\ \times & -3x^2y+2y \\ \hline & -12x^6y^2+21x^4y^2-9x^2y^2 \end{array}$$

multiplicando por $-3x^2y$

$8x^4y^2 - 14x^2y^2 + 6y^2$ multiplicando $2y$

$-12x^6y^2 + 21x^4y^2 - 23x^2y^2 + 6y^2$ sumando los términos semejantes.

Multiplicación de dos binomios

Podemos encontrar el producto de dos binomios mentalmente. El procedimiento consiste en aplicar, como en el apartado anterior, la propiedad distributiva.

Ejemplo:

$(3xy + 2x)\cdot(x^2 + 2xy^2) = 3x^3y + 6x^2y^3 + 2x^3 + 4x^2y^2$

Cuadrado de un binomio

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$

El cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término, más el doble del producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos:

1. $(y-5)^2 = y^2 - 2\cdot y\cdot 5 + 5^2 = y^2 - 10y + 25$
2. $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 12xy + 9y^2$

Multiplicación de binomios conjugados

$(a+b)(a-b) = a^2 - a\cdot b + a\cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

El producto de la suma y la diferencia de dos términos es el cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

Ejemplo:

$(y+5)(y-5) = y^2 - 5^2 = y^2 - 25$

Cubo de un binomio

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El cubo de un binomio es el cubo del primer término, más el triple del producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Ejemplos:

1. $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
2. $(x-2)^3 = [x + (-2)]^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot(-2) + 3\cdot x\cdot(-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Actividad 13:

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\left(x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 3\right).(-2x+1)$
b) $(3x^2 - 2x + 1).(x^3 + 2x)$

c) $(x^3 - 2x - 3x^2).\left(-x + \frac{1}{2}x^2 - 2\right)$
d) $(2x^3 + x)^2$
e) $(3x - 2x^2)^3$
f) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$
g) $(6x^3 + x).(6x^3 - x)$
h) $(2x^2 - 3x)^3$

DIVISIÓN ENTRE POLINOMIOS

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con $Q(x) \neq 0(x)$, $gr[P(x)] = m$, $gr[Q(x)] = n$ y $m \geq n$
Entonces existen dos polinomios únicos $C(x)$ y $R(x)$ tales que verifican la siguiente expresión:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ (Algoritmo de la división)}$$

Donde $R(x)$ es el polinomio nulo o tiene un grado menor al grado de $Q(x)$
Llamaremos a $P(x)$ **dividendo**, a $Q(x)$ **divisor**, a $C(x)$ **cociente** y a $R(x)$ **resto**
Cuando $R(x) = 0$ entonces $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$ y así $Q(x)$ es un factor de $P(x)$. En este caso se dice que $P(x)$ es **divisible** $Q(x)$, o que $Q(x)$ es **divisor** de $P(x)$.

<u>Observación</u>: si $Q(x)$ es un polinomio de primer grado, entonces el resto $R(x)$ es un polinomio de grado cero, es decir, un número real.
Ejemplo:
Sean $P(x) = 8x^3 + 2x^2 - 3x + 6$ y $Q(x) = 4x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 8x^3 + 2x^2 - 3x + 6 & 4x^2 + 3x - 2 \\ \cline{3-3}
 & -8x^3 - 6x^2 + 4x & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -4x^2 + x + 6 & \\
 & +4x^2 + 3x - 2 & \\ \cline{2-2}
 & 4x + 4 &
\end{array}$$

Con lo cual:
$C(x) = 2x - 1$ y $R(x) = 4x + 4$
Y se verifica que: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ ya que:
$8x^3 + 2x^2 - 3x + 6 = (4x^2 + 3x - 2) \cdot (2x - 1) + (4x + 4)$

<u>Observación</u>: Cuando $P(x)$ no es un polinomio completo es necesario <u>ordenarlo</u> con forma decreciente <u>y completarlo</u> para poder realizar los cálculos

<u>**División de un polinomio en una variable por uno de la forma**</u> $(x - a)$
<u>**Regla de Ruffini**</u>

Sean $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - x + 12$ y $Q(x) = x - 2$. Calcular $P(x) : Q(x)$
Se emplea la siguiente disposición práctica:

- ✓ En la primera fila se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado.

- ✓ En la segunda fila, a la izquierda se escribe a, en este caso 2

	4	5	-1	12
2				

Si el polinomio divisor hubiese sido $Q(x) = x + 2$, a hubiese sido -2, pues $x + 2 = x - (-2)$

- ✓ En la tercer fila se escriben los coeficientes del cociente que se van obteniendo

	4	5	-1	12	
2		8 (2 x 4)	26 (2 x 13)	50 (2 x 25)	
	4	13	25	62	→ Resto

$$C(x) = 4x^2 + 13x + 25$$

<u>Observación</u>: El grado del polinomio cociente es uno menor que el grado del polinomio dividendo.

<u>Teorema del resto</u>: el resto de la división de un polinomio por otro de la forma $(x \pm a)$, es el resultado que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor. En aquellas divisiones entre P(x) y Q(x), donde el resto es 0, se dice que P(x) es divisible por Q(x), o que Q(x) divide a P(x).
Ejemplo:
Calcula el resto de la división: $(2x^3 + 5x^2 - x - 5):(x + 2)$

$P(-2) = 2.(-2)^3 + 5.(-2)^2 - (-2) - 5 = 1$
El resto de la división es 1

<u>Actividad 14:</u>
Resuelve las siguientes divisiones de polinomios. En los casos que sea posible, aplica regla de Ruffini:

a) $(2x^3 - 9x^2 + 2x - 5):(2x - 5)$
b) $(9x^2 - 6x - 5):(x - 1)$
c) $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4):(x^2 - x)$
d) $\left(-\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right):(x + 2)$
e) $(x^3 - 125):(x^2 + 5x + 25)$
f) $\left(\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3\right):(x + 1)$

<u>Actividad 15:</u>
Calcula el resto de las siguientes divisiones. Indica aquellos polinomios que son divisibles:

a) $(5x^2 - 2x + 4):(x + 3)$
b) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5):(x - 2)$
c) $(x^5 + 32):(x + 2)$
d) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right):(x + 2)$
e) $(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16):(x + 4)$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar una expresión significa escribirla como un producto equivalente a ella.
Las reglas de factorización que utilizaremos son las siguientes:

- **Factor común**: Se aplica cuando la variable *x* figura en todos los términos de *P(x)* (polinomio). Se extrae *x* elevada a la menor potencia con que figure.

Ejemplo:
$12x^4 - 300x^3 + 60x^2 = 12x^2 \cdot \left(x^2 - 25x + 5\right)$

- **Factor común por grupos**: Se aplica cuando un polinomio, *P(x)* puede separarse en grupos de igual cantidad de términos, de modo tal que cada uno de ellos tenga un factor común. Luego, debe haber un factor común en todos los grupos, que se vuelve a extraer.

Ejemplo:
$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = \left(x^3 - 2x^2\right) + \left(3x - 6\right) = x^2\left(x-2\right) + 3\left(x-2\right) = \left(x^2+3\right) \cdot \left(x-2\right)$

- **Diferencia de cuadrados**: Cuando un polinomio $P(x)$ es una resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, la fórmula que se aplica es:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) =$$

> En palabras: *la diferencia de cuadrados es igual a la resta (suma) por la suma (resta) de las bases de esas potencias.*

Ejemplo:
$x^2 - 25 = (x+5).(x-5)$

- **Trinomio cuadrado perfecto**: Cuando se tiene un trinomio de grado par, con dos términos que son cuadrados perfectos y un término que es el doble del producto de las raíces cuadradas de los otros dos, dando como resultado el cuadrado de un binomio. La fórmula que se aplica es:

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$

Ejemplo:
$x^8 + 12x^4 + 36 = (x^4 + 6)^2$

$\sqrt{x^8} = x^4$ $\quad 2.x^4.6$ $\quad \sqrt{36} = 6$

- **Cuatrinomio cubo perfecto:** Llamamos así a todo cuatrinomio de la forma $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Extrayendo las bases de las potencias cúbicas, factorizamos el cuatrinomio dado, resultando que:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{2}m^3+6m^6+8m^9=\left(\frac{1}{2}+2m^3\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2} \qquad 3.\left(\tfrac{1}{2}\right)^2.\,2m^3 \qquad 3.\tfrac{1}{2}.\,(2m^3)^2 \qquad \sqrt[3]{8m^9}=2m^3$$

- **<u>Método por raíces. Teorema de Gauss</u>**:

✓ Decimos que un número real a es **raíz o cero** del polinomio $P(x)$ sí sólo si verifica que: $P(a)=0$

✓ Un polinomio de grado n, tiene n raíces (reales o complejas), contadas con su multiplicidad, según lo expresa el Teorema fundamental del Álgebra.

✓ Si a es raíz de $P(x)$, el resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)$ es cero.

✓ Si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)=(x-a)\cdot C(x)$. Es decir el polinomio dividendo queda expresados como producto del divisor por el cociente.

<u>Teorema de Gauss</u>

TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES

Sea $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) un polinomio de grado n con coeficientes enteros.

Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de $P(x)=0$, con $\frac{p}{q}$ en términos más simples, entonces p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n

Ejemplo:

Factoricemos $P(x)=x^3-6x+4$ donde $a_0=4$ y $a_3=1$, si $P(x)$ admite una raíz racional $a=\frac{p}{q}$ se deberá verificar que p es divisor de 4 y que q es divisor de 1. Luego:

Los posibles $\begin{cases} p=\pm 1;\pm 2;\pm 4 \\ q=\pm 1 \end{cases}$ Las posibles raíces racionales son: $\{\pm 1;\pm 2;\pm 4\}$

Probando con todas, la única raíz racional es $x=2$. Es decir que $(x-2)$ es divisor de $P(x)$

$$P(x)=(x-2)\cdot C(x)$$

	1	0	-6	4
2		2	4	-4
	1	2	-2	0

Luego $C(x)=x^2+2x-2$ y $P(x)=(x-2)\cdot(x^2+2x-2)$

Ahora bien, como las raíces de $C(x)$, también lo son de $P(x)$, busquémoslas aplicando la fórmula resolvente:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}$$

Luego: $x_1=-1+\sqrt{3}$ y $x_2=-1-\sqrt{3}$

Así las raíces de $P(x)$ son: $x_1=-1+\sqrt{3}$; $x_2=-1-\sqrt{3}$; $x_3=2$

El polinomio factorizado queda expresado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P(x)=\mathbf{a_n}.(\mathbf{x}-\mathbf{x_1}).(\mathbf{x}-\mathbf{x_2}).(\mathbf{x}-\mathbf{x_3})}$$

$$P(x)=x^3-6x+4=(x-2).\left[x-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right].\left[x-\left(-1-\sqrt{3}\right)\right]$$

Para determinar si puedes transformar un polinomio $P(x)$ en una multiplicación de polinomios de menor grado que $P(x)$, debes analizar si dicho polinomio:

- Tiene un FACTOR COMÚN.
- Tiene FACTORES COMUNES POR GRUPOS.
- Es una DIFERENCIA DE CUADRADOS.
- Es un TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.
- Es un CUATRINOMIO CUBO PERFECTO
- Tiene una RAÍZ.

***El camino que se elija queda a cargo de quien resuelva el ejercicio*.**
Sólo se sugiere que:

- Siempre se busca en primer lugar un factor común.
- Considera el número de términos:
  - ✓ Si se reconoce que se trata de un trinomio cuadrado perfecto, convertirlo en el cuadrado de un binomio es el procedimiento más rápido;
  - ✓ Si se reconoce que se trata de un cuatrinomio cubo perfecto, convertirlo en el cubo de un binomio es el procedimiento más rápido;
  - ✓ Si se trata de un polinomio de dos términos factorizarlo como diferencia de dos cuadrados o buscar las raíces;
  - ✓ Si se trata de un trinomio u otro polinomio, de grado mayor o igual a tres, donde no podemos hallar factor común ni en grupos y pide factorizarlo, no va a quedar otro camino que el de utilizar el criterio de la raíz.
  - ✓ Como última observación, siempre se debe factorizar un polinomio en forma completa, asegurándose que cada factor sea primo.

Una expresión algebraica entera se dice **prima** cuando no puede expresarse como producto de otros polinomios reales, caso contrario será **compuesta.**
Ejemplos:

a) $12y^3-72y^2+108y=12y.(y^2-6y+9)=12y.(y-3)^2$

b) $x^3-8=(x-2).(x^2+2x+4)$

Actividad 16:
Factoriza los siguientes polinomios como producto de sus factores primos:

$a)\ 24x^5+18x^4-30x^2$ $\qquad b)\ 4x^3-2x^2+6x-3$ $\qquad c) x^4-\frac{1}{81}$

$d) x^6+4x^3+4$ $\qquad e) \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-1$ $\qquad f)\ x^3-3x+2$

$g)-4x^4+12x^3-7x^2-3x+2$ $\qquad h)\ 25x^6-4$ $\qquad i) x^4-x^3+x-1$

$j)\ x^3-3x^2-x+3$ $\qquad k)\ x^6-\frac{1}{16}x^2$ $\qquad l)\ 20x^3-60x^2+45x$

$m)\ x^4-a^6b^2$ $\qquad n)\ x^4+4-5x^2$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Una **ecuación** es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas. Por lo regular involucra una o más variables y el símbolo de igualdad. En el siguiente cuadernillo repasaremos ecuaciones con una incógnita, de primer grado.
Las expresiones separadas por el símbolo de igualdad se denominan **lados** (miembros) de la ecuación; por separado se llaman el *lado izquierdo* (primer miembro) y el *lado derecho* (segundo miembro).
Una ecuación que se refiere a una variable, es una proposición válida para un valor de la variable, en tanto que es falsa para otros valores de la variable. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$2x-3=x+2$$

Si *x* toma el valor 5, esta ecuación se reduce a $2.5-3=5+2$ que es una proposición verdadera. Por otra parte, si *x* toma el valor 4, obtenemos $2.4-3=4+2$ que es una proposición falsa.
Un valor de la variable que haga que la ecuación sea una proposición cierta se denomina **raíz** o **solución** de la ecuación dada. Decimos que tal valor de la variable *satisface* la ecuación. Dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se dice que son **equivalentes**.

El proceso de encontrar las raíces se denomina **resolver la ecuación**. Al llevar a cabo este proceso, por lo general efectuamos ciertas operaciones en la ecuación que la transforman en una nueva ecuación más fácil de resolver. Tales simplificaciones deben realizarse en forma tal que la nueva ecuación tenga las mismas raíces que la ecuación original. Las dos operaciones siguientes producen nuevas ecuaciones, al mismo tiempo que cumplen con el requerimiento de no alterar las raíces de la ecuación.
1. PRINCIPIO DE ADICIÓN: Podemos sumar o restar cualquier constante o cualquier expresión algebraica que incluya la variable a ambos lados de la ecuación.
2. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN: Podemos multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cualquier constante *distinta de cero* o cualquier expresión *no cero* que incluya la variable.
(*Observación*): La multiplicación por una expresión puede producir una ecuación cuyas raíces difieran de la ecuación original, si la expresión se hace cero para ciertos valores de la variable).
Observe que de acuerdo con estos principios, debemos hacer la misma operación en ambos lados de la ecuación.

Por ejemplo, consideremos la ecuación: $x - 3 = 2$
Sumemos 3 a ambos lados de la ecuación. Por el principio de adición, esta operación no cambia las raíces de la ecuación: $x - 3 + 3 = 2 + 3$
Después de simplificar, resulta: $x = 5$
Por tanto, concluimos que si *x* satisface la ecuación entonces *x*= 5; 5 es la única raíz de la ecuación. Aplicamos aquí el principio de adición.
Un segundo ejemplo, consideremos la ecuación $5x = 15$
Dividimos ambos lados de la ecuación entre 5. Por el principio de multiplicación, esta operación no cambiará las raíces de la ecuación dado que el número por el que estamos dividiendo no es cero. Obtenemos:

$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$

Así, la única solución de la ecuación es $x = 3$

<u>Actividad 17:</u> Halla el valor de la incógnita

a) $2x - 5 = -15 - 3x$
b) $2z - 5(1 - 3z) = 1 - 3(1 - 2z)$
c) $(x - 4)^2 = (x - 2)^2$
d) $(3y + 1)(2y - 1) - 2y^2 = (2y - 3)^2 + 6y + 5$
e) $\frac{5x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}(x - \frac{2x-1}{3})$
f) $x(x + 2)(x + 4) + x^3 = 2(x + 1)^3$

<u>Actividad 18:</u> Plantea la situación a través de una ecuación, resuelve y contesta:

a) De un depósito lleno de líquido se sacó la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto, y aún quedan 1.600 litros. Calcule la capacidad del depósito.

b) Tres amigos juegan a la lotería y obtienen un premio de 200.000 dólares. Calcule cuánto debe corresponderle a cada uno sabiendo que el primero juega el doble que el segundo y éste, el triple que el tercero. (Sugerencia: llame x a la cantidad que corresponde al tercero).

c) En un negocio se venden los artículos del siguiente modo: una entrega de \$ 40 y tres cuotas de modo que la primera es el doble de la segunda, y la tercera es el triple de la primera. El precio del artículo más barato es \$ 130. ¿Cuál es el valor de cada cuota para este caso?

d) En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 108 personas? *Ayuda: defina a "x" como la cantidad de hombres en la reunión*.

e) Un padre tiene 40 años y su hijo 10. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

<u>LOGARITMOS</u>

La invención de los logaritmos obedeció al propósito de simplificar los cálculos aritméticos, sobre todo las engorrosas multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces de números de muchas cifras que se necesitaban realizar sobre todo en navegación y astronomía.

John Neper, en el siglo XVIII tuvo la brillante idea de reducir, mediante logaritmos, las operaciones de multiplicación y división a sumas y restas relativamente simples. Debido a la utilidad de los resultados pronto se construyeron tablas impresas de logaritmos en base 10 y en base e; las que se volvieron obsoletas con la aparición de calculadoras y computadoras.

Fue la exigencia la que hizo que los logaritmos, como regla para simplificar los cálculos, aparecieran antes que la función exponencial.

Actividad 19:

Completa la tabla y grafica la siguiente situación:

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Cuando el individuo adulto llega a cierto grado de madurez se parte y da lugar a dos individuos jóvenes. Transcurrido cierto tiempo, cada uno de ellos repite el proceso. Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones de cultivo o lugar donde se encuentren. Supongamos que las condiciones de cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que inicialmente hay una ameba.

Tiempo	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Nº de amebas						

x: representa el tiempo, *y: representa el número de amebas*

y = ...

Si tenemos 512 amebas ¿Cuánto tiempo ha pasado?..

Queda planteada una ecuación donde la incógnita actúa como. . . . .

DEFINICIÓN DE LOGARITMO:

El logaritmo en base b de un número a es el número c, si b elevado al exponente c da como resultado a.

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

b es la **base** del logaritmo y **a** es el **argumento** del logaritmo.

Ejemplo: $\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$

Forma logarítmica — Forma exponencial

Cuando pensamos "a qué exponente debo elevar el 2 para obtener un número determinado", estamos buscando el logaritmo en base 2 de ese número.

Los siguientes cálculos nos ayudarán a descubrir las condiciones que deben reunir los números reales "a" y "b":

Actividad 20:

$\log_5 125 =$	$\log_2 2 =$	$\log_3 27 =$
$\log_7 7 =$	$\log_2 64 =$	$\log_6 1 =$
$\log_7 49 =$	$\log_{12} 1 =$	$\log_3 \frac{1}{9} =$
$\log_1 8 =$	$\log_2 \sqrt{2} =$	$\log_2 (-4) =$
$\log_{\sqrt{3}} 9 =$	$\log_{-3} 27 =$	$\log_{0,5} 4 =$
$\log_{-4} (-16) =$	$\log_2 \frac{1}{16} =$	$\log_3 0 =$

Completa:
La base debe ser un número ....y ....
El argumento debe ser un número................................

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Complete el siguiente cuadro :

ENUNCIADO	EXPRESIÓN SIMBÓLICA	EJEMPLO NUMÉRICO
El logaritmo de 1, en cualquier base es 0.	$\log_b 1 = 0 , \forall b$	$\log_7 1 = 0$
	$\log_b b = 1 , \forall b$	
El logaritmo de un producto es igue a la suma de los logaritmos de los factores, si éstos existen.	$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y$	
El logaritmo de un cociente es igual a la resta entre los logaritmos del dividendo y el divisor, respectivamente, si éstos existen.		
	$\log_b a^n = n.\log_b a$	

		$\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{\log_2 4}{3} = \frac{2}{3}$

LOGARITMOS DECIMALES Y LOGARITMOS NATURALES:

Cuando la base del logaritmo es 10, los logaritmos se llaman decimales; en ellos no es necesario indicar la base :

$$\log x = \log_{10} x$$

Otros logaritmos que se utilizan con frecuencia son los naturales o neperianos (en honor a John Neper, matemático escocés, 1550- 1617). Su escritura es **ln** y su base es el número irracional **e = 2, 718 . . . . .**

$$\ln x = \log_e x$$

Con las calculadoras científicas se pueden obtener ambos apretando las teclas **log** y **ln** respectivamente.

Actividad 21:

Obtiene utilizando la calculadora, con ε = 0,001:

$\log 10.000 =$ $\qquad$ $\ln 250 =$

$\log 0{,}001 =$ $\qquad$ $\ln 1280 =$

$\log 32.500 =$ $\qquad$ $\ln 650 =$

log 124 = $\qquad$ ln 8=

Actividad 22:

Aplicando la definición de logaritmo, halla x :

a) $\log_3 x = \frac{1}{4}$ $\qquad$ b) $\log_x \frac{1}{81} = -4$ $\qquad$ c) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$

d) $\log_3 (x+2) = 2$ $\qquad$ e) $\log_5 x = -3$

Actividad 23:

Aplicando las propiedades del logaritmo, calcula:

a) $\log_2 (16.8) =$ $\qquad$ e) $\log_2 \sqrt[3]{2^4 .16} =$

b) $\log_3 (27:3) =$ $\qquad$ f) $\log_{\sqrt{2}} (4.\sqrt{2}) =$

c) $\log_2 4^3 =$ $\qquad$ g) $\log_{\frac{3}{2}} \left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{-1} . \frac{4}{9} \right] =$

d) $\log_5 \sqrt[3]{25} =$ $\qquad$ h) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{1}{5} .25}$

CAMBIO DE BASE

Supongamos que queremos averiguar el $\log_3 243$ utilizando una calculadora científica.

Podemos proceder así:

- según la definición de logaritmo, $\log_3 243 = x \Rightarrow 3^x = 243$
- aplicamos logaritmos decimales a ambos miembros
  $\log 3^x = \log \ldots\ldots$
- aplicamos la propiedad del exponente de un logaritmo, de esta manera la incógnita multiplica al logaritmo x. ……. = ………
- despejamos $x = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$, pero $x = \log_3 243$, entonces: $\log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 3}$

Este procedimiento se llama **cambio de base**, y nos permite cambiar la base **b** de un logaritmo por otra más conveniente (hemos elegido base 10, pero podríamos haber elegido cualquier otra).
Si llamamos **w** a la base elegida, podemos aplicar directamente la siguiente fórmula:

$$\log_b a = \frac{\log_w a}{\log_w b}$$

Así podemos obtener con la calculadora científica el logaritmo de un número en cualquier base. La nueva base que elegiremos será **10.**

Ejemplo:

log2256 =  256   2 = 8

Actividad 24:
Halla, utilizando la calculadora, los siguientes logaritmos ($\varepsilon < 0{,}001$):

a) $\log_3 125 =$ b) $\log_8 12 =$ c) $\log_4 620 =$
d) $\log_{½} 64 =$ e) $\log_4 1/16 =$ f) $\log_{¼} 324 =$
g) $\log_6 56 =$ h) $\log_{1/3} 27 =$ i) $\log_{2/3} 81/64 =$

Actividad 25:
Sabiendo que $\log_a x = 3$ y $\log_a y = 1{,}2$, calcula:

a) $\log_a (x.y) =$ d) $\log_a \sqrt{y} =$
b) $\log_a \frac{1}{x} =$ e) $\log_a x^2 =$
c) $\log_a (x : y) =$ f) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{y}} =$

Actividad 26:
Expresa como único logaritmo, de ser posible simplifica:

a) $\frac{2}{3} \cdot \log_a x - \frac{1}{2} \cdot \log_a y =$
b) $\frac{1}{2} \cdot \log_a x + 3 \cdot \log_a y - 2 \cdot \log_a x =$
c) $\log_a 2 \cdot x + 3 \cdot (\log_a x - \log_a y) =$
d) $\log_a x^2 - 2 \cdot \log_a \sqrt{x} =$
e) $\log_a \frac{a}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{a \cdot x} =$
f) $\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x - 2) =$
g) $5 \cdot \log_a x - \log_a y + \frac{1}{4} \cdot \log_a z =$

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DEL MÓDULO

3) a) $A = \{-4, -3, -2, -1\}$
b) $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
c) $C = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1\}$

4) a) Propiedad conmutativa de la suma
b) Propiedad del elemento neutro de la multiplicación
c) Propiedad del elemento neutro de la suma
d) Propiedad del elemento inverso (inverso aditivo u opuesto)
e) Propiedad Asociativa de la suma
f) Propiedad de la multiplicación por cero
g) Propiedad del elemento inverso (inverso multiplicativo o recíproco) (ver si están de acuerdo)
h) Propiedad asociativa de la multiplicación
i) Propiedad distributiva
j) Propiedad conmutativa de la suma

5)
a) 46 b) $-\frac{92}{15}$ c) -1920 d) -56 e) $\frac{43}{10}$ f) $\frac{11}{3}$ g) $\frac{5}{8}$ h) $-\frac{1}{2}$
i) $\frac{55}{2}$

6)
a) $x^6 y^2$ b) $\frac{4a^6}{b^8}$ c) $\frac{x^9}{2y^6}$ d) $-\frac{b^{10}}{a^{31}}$ e) $(a+b)^6$ f) $\frac{4}{(xy)^6}$ g) $\frac{a^2}{b^3}$ h) x^2y^3
i) $5x$

7)
a) $\frac{1}{9}$ b) -4 c) 5 d) $\frac{1}{2}$ e) 50 f) 9 g) $2y\sqrt[10]{4y^5}$
h) 17 i) 3 j) $\frac{\sqrt[3]{35}}{6}$ k) $\frac{97}{36}$ l) $\frac{a^6}{125}$

8)
a) 4 b) 5 c) 42 d) 20 e) 6 f) $14x^2z^6\sqrt{6xz}$ g) $3a^6y^3\sqrt{my}$

9)
a) $4\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{2}$ c) $17\sqrt{5}$ d) $-16\sqrt{6}$ e) $-21x\sqrt{3}$ f) $6\sqrt[3]{2}$ g) $5\sqrt{10}$

h) $14\sqrt{2}$ i) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ j) $12 + \sqrt{6}$ k) $6axy\sqrt[3]{y^2} + 6cx\sqrt[3]{y}$ l) $-\frac{1}{3}m^2\sqrt[3]{2m^2}$

m) $-\frac{3}{4}xy^2\sqrt[12]{\frac{400\,x^7}{27y}}$ ó $-\frac{3}{2}xy^2\sqrt[12]{\frac{25\,x^7}{6912y}}$

10)
a) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ c) $\frac{7\sqrt{11}}{11}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ e) $3+\sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$
g) $\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{11}-\sqrt{15}+\sqrt{55}}{-8}$ h) $5+2\sqrt{6}$ i) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ j) $\frac{\sqrt{2y}}{3y}$ k) $\frac{\sqrt[6]{y^5}}{y}$ l) $\frac{y\sqrt{2x}}{4}$

11)
a) $\frac{1}{16}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{71}{28}-2\sqrt{\frac{3}{2}}$ d) $\frac{2x^2+2y}{x^2-y}$ e) $a+b-c^2$ f) 0

12)
a) $-5x^3-x^2+\frac{9}{2}x-1$ b) $-x^3+3x^2-\frac{13}{2}x-\frac{5}{4}$ c) $-6x^3-x^2+x+\frac{11}{4}$
d) $6x^3+x^2+\frac{13}{4}$

13)
a) $-x^4-\frac{3}{2}x^3+x^2-6x+3$ b) $3x^5-2x^4+7x^3-4x^2+2x$ c) $\frac{1}{2}x^5-\frac{5}{2}x^4+8x^2+4x$
d) $4x^6+4x^4+x^2$ e) $27x^3-54x^4+36x^5-8x^6$ f) $x^4-\frac{1}{9}$ g) $36x^6-x^2$
h) $8x^6-36x^5+54x^4-27x^3$

14)
a) x^2-2x-4 b) $9x+3$ c) x^2+4x+2 d) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{19}{6}x+\frac{19}{3}$
e) $x-5$ f) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}$

15)
a) 55 b) 171 c) 0 d) 7 e) 0

16)
a) $6x^2(4x^3+3x^2-5)$ b) $(2x-1)(2x^2+3)$ c) $\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$
d) $(x^3+2)^2$ e) $(\frac{1}{2}x-1)^3$ f) $(x+2)(x-1)^2$ g) $(x-1)(x-2)(1-2x)(1+2x)$
h) $(5x^3-2)(5x^3+2)$ i) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$ j) $(x+1)(x-1)(x-3)$
k) $x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ l) $5x(2x-3)^2$ m) $(x^2-a^3b)(x^2+a^3b)$
n) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

17) a) x= -2 b) z= 3/11 c) x= 3 d) y= 3 e) x= 1 f) x= 1

18) a) x = 4800 b) x = 20000 c) x = 10 d) x = 9 e) x = 5

22) a) x = $\sqrt[4]{3}$ b) x = 3 c) x = 125 d) x = 7 e) x = $\frac{1}{125}$

23) a) 7 b) 2 c) 6 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{3}$ f) 5 g) $-\frac{5}{2}$ h) 1

24)

a) 4,3949 b) 1,1950 c) 4,6381 d) -6 e) -2 f) -4,1699

g) 2,2466 h) -3 i) -0,5810

25) a) 4,2 b) -3 c) 1,8 d) 0,6 e) 6 f) -0,4

26)

a) $\log_a \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{y}}$ b) $\log_a \frac{y^3}{\sqrt{x^3}}$ c) $\log_a [2x(\frac{x}{y})^3]$ d) $\log_a x$

e) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{x}$ f) $\log_a (x + 2)$ g) $\log_a \frac{x^5 . \sqrt[4]{z}}{y}$

La Matemática y su enseñanza en el mundo contemporáneo

“Es difícil dar una idea de la vasta extensión de la matemática, la palabra extensión no es la adecuada, quiero significar una extensión que está llena de hermosos detalles, no una extensión uniforme, como una llanura desnuda, sino una región de un hermoso país, visto primero a distancia, pero que merece ser recorrida de un extremo a otro y estudiada hasta en sus menores detalles, en sus valles, sus cursos de agua, sus peñascos, sus bosques y sus flores”

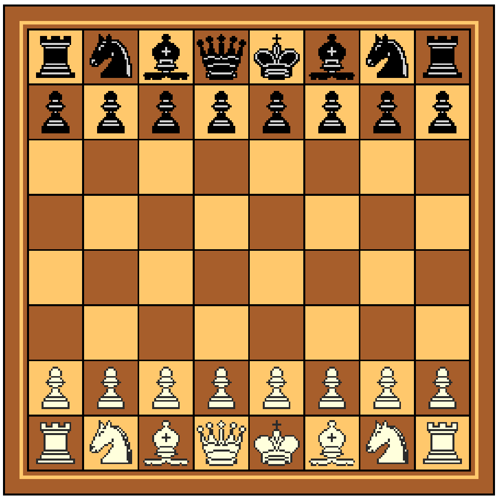
Arthur Cayley

>> Primer momento:

Tarea 1: Grupalmente conversen acercan de sus expectativas en relación a la carrera superior que están iniciando. El desafío será expresarlas usando símbolos matemáticos que conozcan, en los afiches que les facilitamos y luego compartirlo oralmente con el grupo completo.

Tarea 2: Respondan con sus palabras: **¿Qué es la Matemática?**

Tarea 3: Resuelvan el **Problema del Ajedrez** que se planteará oralmente en el aula



Tarea 4: Lean el texto ”¿Qué es la Matemática?” extraído del libro MATEMÁTICA….¿ESTÁS AHÍ? de Adrián Paenza (ver anexo)

Tarea 5: Elaboren un cuadro o línea histórica tomando como base los distintos momentos de la historia, con los principales estudios en el campo de la matemática, figuras representativas y la concepción de la matemática como ciencia.

Tarea 6: Confronten su definición de matemática con la extraída del texto y con las estrategias y pasos seguidos en la resolución del problema del Ajedrez para descubrir coincidencias y divergencias. Presenten en dos párrafos sus conclusiones, pueden organizarla siguiendo esta propuesta:

“Con respecto a la pregunta qué es la matemática antes de la lectura del texto yo consideraba…..
Ahora he ampliado (modificado) mis ideas y ……..”

>> Segundo momento:

Tarea 1: Resuelva el **Problema del ajedrez mutilado** extraído de SINGH, Simón (1999) *El último teorema de Fermat* ,Madrid, Sigma . pág. 55 a 61

Tarea 2: Confronte su resolución con la planteada en el texto original para descubrir coincidencias y divergencias. (Se presentará durante esa jornada)

Tarea 3: Analicen y compartan grupalmente la forma que adoptaron para resolverlo y el método que sigue la matemática para validar, generalizar y demostrar sus leyes. También evalúen sus semejanzas o diferencias con la forma de aprender y enseñar la disciplina que experimentaron en su vida académica.

Algunas preguntas para guiar la reflexión y el debate grupal:

¿Utilizaron este método en la escuela secundaria? ¿Cómo se podrá enseñar mejor? ¿Cómo aprenderla? ¿Qué enseñar? ¿Por qué la enseñanza de la matemática es tarea difícil? ¿Cómo se puede enseñar matemática a través de la resolución de problemas? ¿Los problemas deben ser intramatemáticos o extramatemáticos? ¿Qué implica la modelización matemática? ¿Las tecnologías pueden colaborar a que se aprenda mejor esta disciplina? ¿Cuál debería ser el rol del docente en todo este proceso?

Tarea4: Registren en un texto breve (de 3 o 4 párrafos) las conclusiones principales del análisis anterior.

Distintos lenguajes matemáticos

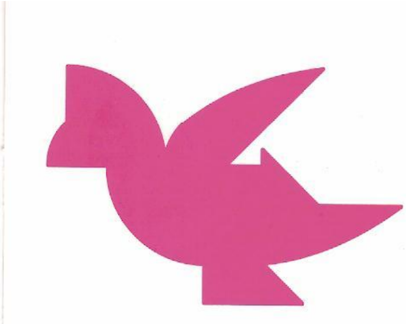
Instrucciones para armar el TANGRAM HUEVO

- ✓ Marca el punto o.
- ✓ Traza un círculo de centro o de 3 cm de radio.
- ✓ Traza el diámetro $\overline{mr}$.
- ✓ Traza otro diámetro $\overline{dc}$ perpendicular a $\overline{mr}$.
- ✓ Une m con d y d con r.
- ✓ Prolonga $\overline{md}$ y menciona a esa semirrecta T.
- ✓ Prolonga $\overline{rd}$ y menciona a esa semirrecta P.
- ✓ Con centro m y radio $\overline{mr}$ traza el arco de circunferencia hasta cortar T.
- ✓ Con centro r y radio $\overline{rm}$ traza el arco de circunferencia hasta cortar P.
- ✓ Al punto intersección del primer arco con P nómbralo f.
- ✓ Al punto intersección del segundo arco con T nómbralo l.
- ✓ Con centro d y radio $\overline{df}$ traza el arco de circunferencia dirigido de P a T.
- ✓ Prolonga $\overline{cd}$ hasta cortar este último arco.

- ✓ Con la medida del radio $\overline{df}$ desde el centro c marca el punto el punto b sobre el eje $\overline{cd}$.
- ✓ Traza la circunferencia de centro b y radio $\overline{bc}$ que corta a $\overline{mr}$ en g y en a.
- ✓ Une g con b y b con a.
- ✓ Borra los trazados auxiliares.

Para el armado:

Recorta las nueve piezas para utilizarlas a todas. Se deben tocar por lo menos en un punto pero sin encimarse pudiéndose diversas figuras como la siguiente.

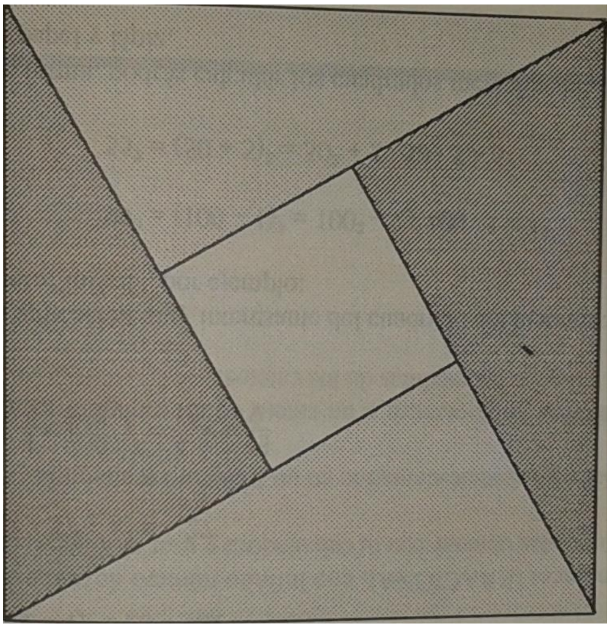


Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras (matemático griego del siglo V a.C) ha sido objeto de interés y estudio por parte de matemáticos de todo el mundo a través de los siglos, debido a lo ingenioso y útil que a resultado. Euclides lo demostró en su obra “Elementos”, no obstante, además de esa, cientos de demostraciones de vida a distintos matemáticos de la antigüedad y de todas las épocas.

Sigue atentamente las indicaciones que se dan a continuación y podrás verificar el Teorema:

1. Recorta:
   a. 4 triángulos rectángulos cuyos lados miden 5cm; 8,5 cm y 10 cm.
   b. 1 cuadrado de lado 3,7 cm.
2. Nombra “A” en cada triángulo a la medida del cateto mayor, “B” al cateto mejor y a la hipotenusa “C”.
3. Compara las longitudes de los catetos con la de los lados del cuadrado. Una vez que hayas encontrad la forma de expresar las medidas del lado del cuadrado escríbela sobre uno de sus lados.
4. Forma el siguiente cuadrado

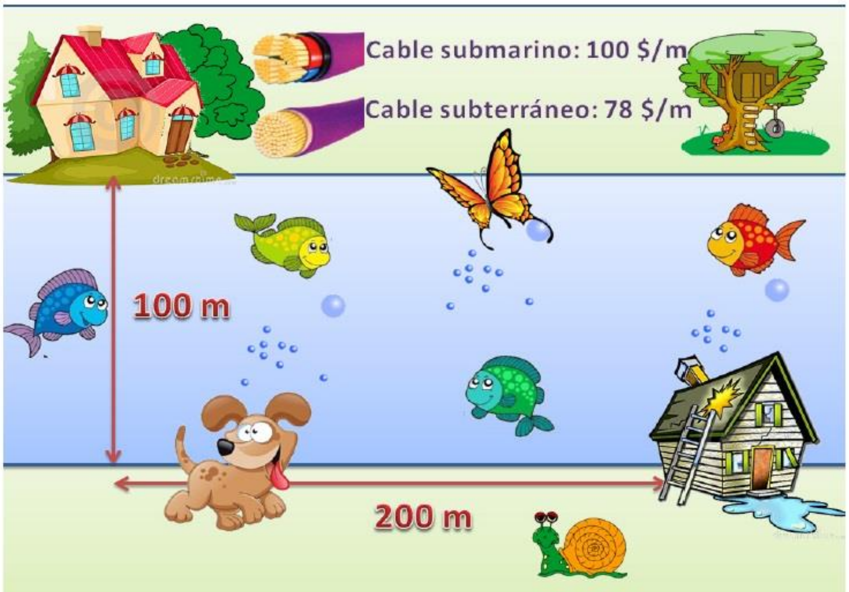


5. Expresa su área de dos modos diferentes:
   a. Como el cuadrado de sus lados
   b. Como suma de áreas de las figuras que lo componen.
6. ¿Lograste verificar el Teorema de Pitágoras?

Problemas

Problema 1:

Supongamos que tenemos que llevar corriente eléctrica desde una casa que se encuentra a la ribera de un río hasta otra casa que se encuentra en reparación, tal como aparece en la imagen. Se puede utilizar cable submarino y/o cable subterráneo, dependiendo de la zona que debemos atravesar. Determinar el modo en que debe hacerse el tendido de cables para que los costos de cableados sean mínimos.



Problema 2:

Anticipar la expansión decimal que tendrá un número racional de la forma:

$$\frac{1}{2^n . 5^m}$$

*donde **n** y **m** son números enteros no negativos*

Problema 3:

*"Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir los puntos medios de los lados del ABCD. Analizar y fundamentar todas las características y propiedades **que se pueden anticipar** del EFGH, si se conocen las características y propiedades del ABCD"*

Problema 4:

*Si **a** y **b** son dígitos distintos de 0, y aceptamos para este problema que **ab** representará a un número formado por los dos dígitos considerados (matemáticamente sabemos que **ab** representa una multiplicación, pues el número formado por los dos dígitos será $10a + b$). Con este "convenio" interno, y sólo a fines de simplificar la notación usada en el problema, tendremos que **aab** es el número que se forma por concatenar 3 dígitos, **aaab** por concatenar 4 y así sucesivamente. Encuentra regularidades entre los siguientes números: $(ab)^2$, $(aab)^2$, $(aaab)^2$, $(aaaab)^2$, ...*

La actividad te tiene que llevar a plantear diferentes combinaciones de dígitos y formular alguna conjetura. Asimismo, pretendemos que hagas "algo de Matemática", y para ello, que demuestres al menos una de las conjeturas que has formulado.

Anexo

¿Qué es la matemática?

- Por Adrián Paenza
- Extraído de: “Matemática, estás ahí?”

Estas reflexiones fueron inspiradas en un libro de Keith Devlin (¿Qué es la matemática?). Sugiero que lean con la mayor flexibilidad posible. No es patrimonio mío (ni mucho menos). Es un recorrido por una historia que me parece que uno no debería ignorar y, quizá, cuando termine, haya aprendido algo que no sabía.

Si hoy parara a una persona por la calle y le preguntara "¿qué es la matemática?", probablemente contestaría que es el estudio o la ciencia de los números. Lo cierto es que esta definición tenía vigencia hace unos 2500 años. O sea, que la información que tiene el ciudadano común sobre una de las ciencias básicas es equivalente a la de ¡veinticinco siglos atrás! ¿Hay algún otro ejemplo tan patético en la vida cotidiana?

En ese tiempo, la humanidad ha recorrido un camino tan largo y tan rico que creo que podríamos aspirar a tener una respuesta un poco más actual.

Es probable que la mayoría de la gente esté dispuesta a aceptar que la matemática hace aportes valiosos en los diferentes aspectos de la vida diaria, pero no tiene idea de su esencia ni de la investigación que se hace actualmente en matemática, ni hablar de sus progresos y expansión.

Para lograr captar algo de su espíritu, acompáñeme en este viaje que sirve para refrescar –a muy grandes rasgos– los primeros pasos y la evolución de la matemática a través del tiempo. La respuesta a la pregunta – ¿qué es la matemática?– ha variado mucho en el transcurso de la historia. Hasta unos 500 años antes de Cristo, aproximadamente, la matemática era –efectivamente– el estudio de los números. Me refiero, por supuesto, al período de los matemáticos egipcios y babilonios, en cuyas civilizaciones la matemática consistía casi absolutamente en aritmética. Se parecía a un recetario de cocina: haga esto y aquello con un número y obtendrá tal respuesta. Era como poner ingredientes en la batidora y hacer un licuado. Los escribas egipcios utilizaban la matemática para la contabilidad, mientras que en Babilonia eran los astrónomos los que la desarrollaban de acuerdo con sus necesidades.

Durante el período que abarcó desde los 500 años antes de Cristo hasta los 300 después de Cristo, aproximadamente 800 años, los matemáticos griegos demostraron preocupación e interés por el estudio de la geometría. Tanto que pensaron a los números en forma geométrica. Para los griegos, los números eran herramientas. Así fue como los números de los babilonios “les quedaron chicos...”, ya no les alcanzaban. Tenían los naturales (1, 2, 3, 4, 5, etc.) y los enteros (que son los naturales más el cero y los números negativos), pero no eran suficientes.

Los babilonios ya tenían también los números racionales, o sea los cocientes entre los enteros (por ejemplo: 1/2, 5/3, -7/8, (-13/15), 7/-19, 0, 12/13, etc.), que proveían el desarrollo decimal (5,67 o 3,8479) y los números periódicos (0,4444... o 0,191919...). Estos les permitían medir, por ejemplo, magnitudes mayores que cinco, pero menores que seis. Pero aun así eran insuficientes.

Algunas escuelas como la de los "pitagóricos" (que se prometían en forma mística no difundir el saber) pretendían que todo fuera mensurable, y por eso casi enloquecieron cuando no podían "medir bien" la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midieran uno. O sea, había medidas para las cuales los números de los griegos no se adecuaban o no se correspondían. Es entonces que "descubrieron" los números irracionales... o no les quedó más remedio que admitir su existencia.

El interés de los griegos por los números como herramientas y su énfasis en la geometría elevaron a la matemática al estudio de los números y también de las formas. Allí es donde empieza a aparecer algo más. Comienza la expansión de la matemática que ya no se detendrá. De hecho, fue con los griegos que la matemática se transformó en un área de estudio y dejó de ser una mera colección de técnicas para medir y para contar. La consideraban como un objeto interesante de estudio intelectual que comprendía elementos tanto estéticos como religiosos.

Y fue un griego, Tales de Mileto, el que introdujo la idea de que las afirmaciones que se hacían en matemática podían ser probadas a través de argumentos lógicos y formales. Esta innovación en el pensamiento marcó el origen de los teoremas, pilares de las matemáticas.

Muy sintéticamente podríamos decir que la aproximación novedosa de los griegos a la matemática culmina con la publicación del famoso libro Los elementos, de Euclides, algo así como el texto de mayor circulación en el mundo después de la Biblia. En su época, este libro de matemática fue tan popular como las enseñanzas de Dios. Y como la Biblia no podía explicar al número π, lo "hacía" valer 3.

Siguiendo con esta pintura a trazos muy gruesos de la historia, es curioso que no haya habido demasiados cambios en la evolución de las matemáticas sino hasta mediados del siglo XVII, cuando –simultáneamente en Inglaterra y en Alemania– Newton, por un lado, y Leibniz, por el otro, "inventaron" el cálculo.

El cálculo abrió todo un mundo de nuevas posibilidades porque permitió el estudio del movimiento y del cambio. Hasta ese momento, la matemática era una cosa rígida y estática. Con ellos aparece la noción de "límite": la idea o el concepto de que uno puede acercarse tanto a algo como quiera, aunque no lo alcance. Así "explotan" el cálculo diferencial, infinitesimal, etcétera. Con el advenimiento del cálculo, la matemática que parecía condenada a contar, a medir, a describir formas, a estudiar objetos estáticos, se libera de sus cadenas y comienza a "moverse".

Los matemáticos estuvieron en mejores condiciones de estudiar el movimiento de los planetas, la expansión de los gases, el flujo de los líquidos, la caída de los cuerpos, las fuerzas físicas, el magnetismo, la electricidad, el crecimiento de las plantas y los animales, la propagación de las epidemias, etcétera.

Después de Newton y Leibniz, la matemática se convirtió en el estudio de los números, las formas, el movimiento, el cambio y el espacio. La mayor parte del trabajo inicial que involucraba el cálculo se dirigió al estudio de la física. De hecho, muchos de los grandes matemáticos de la época fueron también físicos notables. En aquel momento no había una división tan tajante entre las diferentes disciplinas del saber como la hay en nuestros días. El conocimiento no era tan vasto y una misma persona podía ser artista, matemática, física, y otras cosas más, como lo fueron, entre otros, Leonardo Da Vinci y Miguel Ángel.

A partir de la mitad del siglo XVIII nació el interés en la matemática como objeto de estudio. En otras palabras, la gente comenzó a estudiar la matemática ya no sólo por sus posibles aplicaciones, sino por los desafíos que vislumbraba la enorme potencia introducida por el cálculo.

Sobre el final del siglo XIX, la matemática se había convertido en el estudio del número, de la forma, del movimiento, del cambio, del espacio y también de las herramientas matemáticas que se utilizaban para ese estudio.

La explosión de la actividad matemática ocurrida en este siglo fue imponente. Sobre el comienzo del año 1900, el conocimiento matemático de todo el mundo hubiera cabido en una enciclopedia de 80 volúmenes. Si hoy hiciéramos el mismo cálculo, estaríamos hablando de más de 100 mil tomos.

El desarrollo de la matemática incluye numerosas nuevas ramas. En alguna época las ramas eran doce, entre las que se hallaban la aritmética, la geometría, el cálculo, etcétera. Luego de lo que llamamos "explosión" surgieron alrededor de 60 o 70 categorías en las cuales se pueden dividir las diferentes áreas de la matemática. Es más, algunas –como el álgebra y la topología– se han bifurcado en múltiples subramas. Por otro lado, hay objetos totalmente nuevos, de aparición reciente, como la teoría de la complejidad o la teoría de los sistemas dinámicos.

Debido a este crecimiento tremendo de la actividad matemática, uno podría ser tildado de reduccionista si a la pregunta de "¿qué es la matemática?" respondiera: "Es lo que los matemáticos hacen para ganarse la vida".

Hace tan sólo unos veinte años nació la propuesta de una definición de la matemática que tuvo –y todavía tiene– bastante consenso entre los matemáticos. "La matemática es la ciencia de los patterns" (o de los patrones).

En líneas muy generales, lo que hace un matemático es examinar patterns abstractos. Es decir, buscar peculiaridades, cosas que se repitan, patrones numéricos, de forma, de movimiento, de comportamiento, etcétera. Estos patterns pueden ser tanto reales como imaginarios, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos, puramente utilitarios o no. Pueden emerger del mundo que nos rodea, de las profundidades del espacio y del tiempo o de los debates internos de la mente.

Como se ve, contestar la pregunta –¿qué es la matemática?– con un simple "es el estudio de los números", a esta altura del siglo XXI es cuanto menos un grave problema de información, cuya responsabilidad mayor no pasa por quienes eso piensan sino de los que nos quedamos de este otro lado, disfrutando algo que no sabemos compartir.

Problema del ajedrez mutilado extraído de SINGH, Simon (1999) *El último teorema de Fermat* ,Madrid, Sigma

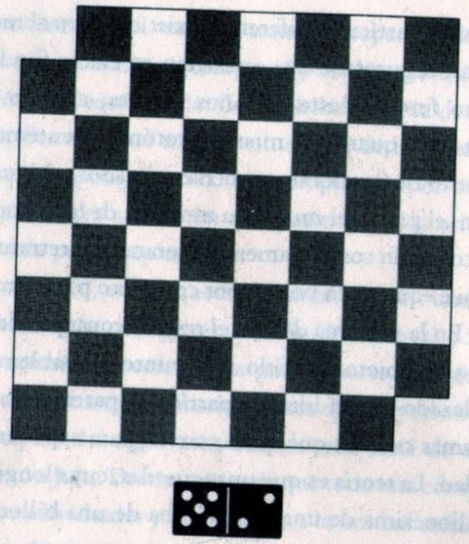


Figura 3. El problema del tablero de ajedrez mutilado.

La ciencia opera de la misma manera que el sistema judicial. Se asume que una teoría es verdadera si hay suficiente evidencia para demostrarla "más allá de toda duda razonable". Por otro lado, las matemáticas no dependen de la evidencia tomada de la falible experimentación, sino que está construida a partir de una lógica infalible. Esto queda demostrado con el problema del tablero de ajedrez mutilado, que se muestra en la figura 3.

Tenemos un tablero de ajedrez al que se le han quitado dos esquinas opuestas, de tal manera que sólo quedan 62 cuadros. Tomamos ahora 31 fichas de dominó, cada una de

las cuales cubre exactamente dos cuadros. La pregunta es: ¿es posible colocar las 31 fichas de dominó de tal manera que cubran los 62 cuadros del tablero de ajedrez?

Hay dos aproximaciones al problema:

(1) La aproximación científica

El científico tratará de resolver el problema mediante la experimentación, y después de intentar varias docenas de disposiciones descubrirá que todas fallan. Finalmente, el científico cree que hay suficiente evidencia para decir que el tablero no se puede cubrir. Sin embargo, el científico nunca puede estar seguro de que esto sea cierto porque podría ocurrir que exista una manera que no se ha ensayado que cubra el tablero. Hay millones de diferentes arreglos y sólo es posible explorar una pequeña fracción de ellos. La conclusión de que el objetivo es imposible es una teoría basada en la experimentación, pero el científico tendrá que vivir con la perspectiva de que algún día esta será invalidada.

(2) La aproximación matemática

El matemático tratará de contestar la pregunta desarrollando un argumento lógico del que se derive una conclusión indudablemente correcta y que jamás sea cuestionada. Un argumento de este tipo es el siguiente:

- Las dos esquinas que se retiraron del tablero eran blancas. Por lo tanto, ahora hay 32 cuadros negros y solamente 30 cuadros blancos.
- Cada ficha de dominó cubre dos cuadros vecinos, y los cuadros vecinos siempre son de diferentes colores, uno blanco y uno negro.

• Por lo tanto, no importa cómo se coloquen, las primeras 30 fichas de dominó que se pongan sobre el tablero cubrirán 30 cuadros blancos y 30 cuadros negros.

• Por consiguiente, al final quedarán una ficha de dominó y dos cuadros negros.

• Pero recuérdese que todas las fichas de dominó cubren dos cuadros vecinos y, que estos son de colores opuestos. Sin embargo, los dos cuadros que quedan sin cubrir son del mismo color, así que no pueden ser cubiertos ambos por la ficha restante. Por lo tanto, ¡es imposible cubrir el tablero!

Esta prueba muestra que ninguna disposición de las fichas podrá cubrir el tablero de ajedrez mutilado. De manera similar, Pitágoras construyó una demostración que prueba que todo triángulo rectángulo obedece su teorema. Para Pitágoras el concepto de demostración matemática era sagrado, y fue la demostración la que le permitió a la hermandad descubrir tanto. La mayoría de las demostraciones modernas son increíblemente complicadas y seguir su lógica sería casi imposible para el lector lego, pero por suerte en el caso del teorema de Pitágoras el argumento es relativamente sencillo y se basa en las matemáticas que se aprenden en la escuela superior. La demostración se esboza en el apéndice 1.

La demostración de Pitágoras es irrefutable. Muestra que su teorema es verdadero para todo triángulo rectángulo del universo. El descubrimiento fue tan memorable que se sacrificaron un centenar de bueyes en un acto de gratitud con los dioses. Constituyó un hito en la matemática y uno

de los más importantes avances en la historia de la civilización. Su importancia comprendía dos aspectos. Primero, desarrolló el concepto de demostración. Un resultado matemático tiene una verdad más profunda que cualquier otra verdad porque es el resultado de un proceso lógico. Aunque el filósofo Tales ya había inventado algunas demostraciones geométricas, Pitágoras llevó la idea mucho más lejos y pudo demostrar afirmaciones matemáticas bastante más ingeniosas. La segunda consecuencia del teorema de Pitágoras es que relaciona el método matemático abstracto con algo tangible. Pitágoras mostró que la verdad de las matemáticas podía aplicarse al mundo científico y proporcionarle unos fundamentos lógicos. Las matemáticas le dan a la ciencia un punto de partida riguroso, y sobre esta base infalible los científicos agregan medidas imprecisas y observaciones imperfectas.

UNA INFINIDAD DE TRIPLETAS

La Hermandad Pitagórica vigorizó las matemáticas con su ferviente búsqueda de la verdad por el camino de la demostración. La noticia de su éxito se difundió y, sin embargo, los detalles de sus descubrimientos siguieron siendo un secreto bien guardado. Muchos pidieron admisión al sanctasanctórum de la sabiduría, pero sólo aceptaban a las mentes más brillantes. Uno de los rechazados fue un candidato con el nombre de Cylón. Cylón se disgustó con su humillante rechazo y veinte años más tarde se vengó.